LUCIAN DRAGOMIR

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a IX-a

consolidare

Ediţia a VII-a

INVATARE DE CONSOLIDARE®
antrenament

Editura Paralela 45

Cuprins

CAPITOLUL I. MULŢIMI ŞI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Mulţimea numerelor reale

Breviar teoretic

Formule de calcul prescurtat

- $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1}),\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 1$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+...+b^{n-1}),\ \forall n\in 2\mathbb{N}+1$
- $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$
- $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ sau
- $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\frac{1}{2}\cdot\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right);$
- $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left((a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)\right);$
- $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a).$

Modulul (sau valoarea absolută a) unui număr real *x*

$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x\ge 0 \\ -x, & \text{dacă } x<0 \end{cases}$ şi $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x)\ge 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x)<0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Proprietăţi ale modulului

- $|x|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R};$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$

- $|x|<c,\ c>0 \Leftrightarrow x\in(-c;c)$;
- $|x|>c,\ c>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-c)\cup(c;\infty)$;
- $\big||x|-|y|\big|\le|x\pm y|\le|x|+|y|$;
- $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;
- $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|},\ y\ne 0$;
- $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$ şi $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu numărul x şi se notează $[x]$. **Partea fracţionară a lui x:** se notează $\{x\}$ şi $\{x\}=x-[x]$.

Proprietăţi

- $[x]=x\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$;
- $\{x\}=0\Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$;
- $[m+x]=m+[x],\ \forall m\in\mathbb{Z}$;
- $\{m+x\}=\{x\},\ \forall m\in\mathbb{Z}$;
- $x-1<[x]\le x<[x]+1$;
- $[x]+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right]=[nx],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\ge 2$ **(Hermite)**.

Inegalităţi remarcabile

- Dacă $a\cdot b>0$, atunci $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\ge 2$.
- $x\cdot y\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$;
- $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$;
- $3\cdot(xy+yx+zx)\le(x+y+z)^2\le 3\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Inegalitatea mediilor

(adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k)\le m_h\le m_g\le m_a\le m_p\le\max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \text{ (media armonică)},$$

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \text{ (media geometrică)},$$

$$m_a = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \text{ (media aritmetică)},$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}{n}} \text{ (media pătratică)}.$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \le ({a_1}^2 + \ldots + {a_n}^2)\cdot({b_1}^2 + \ldots + {b_n}^2) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2$$

Inegalitatea lui Minkovski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \le \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîşev

Dacă $(a_k)_{k\ge1}$, $(b_k)_{k\ge1}$ sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \le n \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă (a_k), (b_k) sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k \ge n \cdot \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \ \alpha \ge -1, \ r \ge 0$$

Exerciţii şi probleme de consolidare

1. Stabiliţi care dintre următoarele rezultate sunt numere naturale:

a) $5\cdot(-3)+2\cdot(-4)-(-3)\cdot 4$;

b) $7\cdot(-2)+3\cdot(-5)+(-1)\cdot(-8)\cdot 5$;

c) $\left[3\cdot(-4)-5\cdot 6\right]:[(-1)\cdot 3+2\cdot 5]$;

d) $\left[2\cdot(-3)\cdot(-4)-15\cdot 3\right]:(3-10)$;

e) $\left[7\cdot(-12)+(-3)\cdot(29)\right]:(12-18)$;

f) $\left[11\cdot(-12)-(-8)\cdot 14\right]:(17-22)$.

2. Stabiliţi care dintre următoarele rezultate sunt numere întregi:

a) $\frac{2}{15}+\frac{7}{10}-\frac{5}{6}$;

b) $\frac{3}{14}+\frac{1}{21}-\frac{1}{6}$;

c) $\frac{7}{10}-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$;

d) $60\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+\frac{2}{15}\right)$;

e) $42\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{13}{14}+\frac{17}{21}\right)$;

f) $105\cdot\left(\frac{17}{35}+\frac{14}{15}-\frac{11}{21}\right)$.

3. Ordonaţi crescător, în fiecare caz, numerele următoare:

a) $x=\frac{11}{3}$; $y=3{,}67$; $z=\frac{19}{6}$; $t=3{,}(61)$.

b) $x=\frac{9}{2}$; $y=4{,}32$; $z=4{,}(3)$; $t=4{,}56$.

c) $x=2{,}6$; $y=\frac{11}{4}$; $z=\frac{5}{2}$; $t=2{,}(63)$.

d) $x=-1{,}5$; $y=-\frac{7}{4}$; $z=-\frac{15}{8}$; $t=-\frac{8}{5}$.

e) $x=-1{,}(2)$; $y=-1{,}2$; $z=-\frac{7}{5}$; $t=-\frac{5}{4}$.

f) $x=\frac{13}{5}$; $y=\sqrt{7}$; $z=\frac{10}{4}$; $t=2{,}(61)$.

4. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu trei numere naturale consecutive, iar măsura celui mai mare unghi este triplul celui mai mic. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

5. Calculaţi aria unui dreptunghi care are perimetrul egal cu 160 cm, iar dimensiunile sale sunt direct proporţionale cu 5, respectiv 3.

6. Calculaţi valoarea raportului $R=\frac{4x+3y}{2x+y}$ ştiind că $x,y\in\mathbb{R}$ şi $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$.

7. Raportul dintre vârsta tatălui şi vârsta fiului său este egal cu 5. Peste 6 ani, raportul vârstelor va fi egal cu 3. Ce vârstă are acum tatăl?

8. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$a=\sqrt{729}$; $d=\sqrt{961}$;

$b=\sqrt{288}$; $e=\sqrt{2601}$;

$c=\sqrt{147}$; $f=\sqrt{5184}$.

9. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$A=\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{125}$; $D=\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{108}$;

$B=\sqrt{98}-\sqrt{18}-\sqrt{8}$; $E=\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$;

$C=\sqrt{75}-\sqrt{27}-\sqrt{12}$; $F=\sqrt{1+3+5+...+99}$.

10. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

11. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$.

12. Determinați numerele întregi a și b pentru care $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=a+b\sqrt{3}$.

13. Determinați numerele întregi c și d pentru care $\left(\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^2=c+d\sqrt{2}$.

14. Ordonați crescător numerele p și q în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $p=\dfrac{2}{3}$ și $q=\dfrac{7}{9}$; d) $p=\dfrac{7}{5}$ și $q=\sqrt{2}$;

b) $p=\dfrac{5}{8}$ și $q=\dfrac{7}{11}$; e) $p=\dfrac{\pi}{6}$ și $q=\dfrac{11}{20}$;

c) $p=3\sqrt{5}$ și $q=5\sqrt{3}$; f) $p=1,(3)$ și $q=\dfrac{17}{13}$.

15. Dacă $a<b$, arătați că $a<\dfrac{2a+5b}{7}<b$.

16. Determinați numărul fracțiilor care satisfac simultan condițiile:

a) numărătorul este un divizor natural al lui 14;
b) numitorul este un divizor natural al lui 104.

17. Arătați că, în fiecare caz, expresiile date se pot scrie ca diferența a două pătrate:

a) $A=(2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$;
b) $B=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$;
c) $C=(a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)$;
d) $D=(a^3-b^2)(a^3+b^2)(a^6+b^4)$;
e) $E=(a+b+c)(a-b+c)$;
f) $F=a(a-2b)$.

18. Descompuneți în factori următoarele expresii, ținând eventual cont de ipoteza indicată în fiecare caz:

a) $E(x)=x^3+x-2,\ \ E(1)=0$;
b) $E(x)=x^3+3x^2+5x+3,\ \ E(-1)=0$;
c) $E(x)=2x^3+x^2+x-1,\ \ E(\frac{1}{2})=0$;
d) $E(x)=x^3+x^2-2x-8,\ \ E(2)=0$;
e) $E(x)=x^3+3x^2+x-5$, există $a\in\mathbb{Z}$ cu $E(a)=0$;
f) $E(x)=x^3-x^2-2x+8$, există $a\in\mathbb{Z}$ cu $E(a)=0$.

19. Precizați care dintre următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$:

a) $x^2-4x+9=(x-2)^2$;
b) $x^2+4x+9=(x+3)^2$;
c) $x^2-9y^2=(x-3y)(x+3y)$;
d) $x^2+4y^2=(x+2y)^2$;
e) $4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$;
f) $(x-2y)^2=x^2-4xy+4y^2$.

20. Descompuneți în factori expresiile următoare:

a) $A=a^4-a$;
b) $B=x(a+b)-a-b$;
c) $C=ax^2-2a-ax^3+2ax$;
d) $D=a^3-a^2b^2+2ab-2b^3$;
e) $E=a^3-2a^2+2a-4$;
f) $F=(2x-1)^2-9$.

21. Descompuneți în factori și următoarele expresii:

a) $E(x)=(x-1)^2-(x+2)^2$;

b) $E(x,\ y)=(x-3y)^2-(2x-y)^2$;

c) $F(x)=4x^2-12x+9$;

d) $G(t)=9t^2+24t+16$;

e) $H(s)=3s^2-30s+75$;

f) $F(x,\ y)=4x^3-8x^2y+4xy^2$.

22. Determinați numerele reale a în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $|2a-5|=11$;

b) $|2+a|=4$;

c) $a+|a+1|=7$;

d) $2a-|a-2|=5$;

e) $a-|a|+6=0$;

f) $2a=|2-a|$.

23. Determinați perechile (x,y) de numere reale pentru care $x+|y|=2x-|y|=3$.

24. Determinați numerele reale x în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $|3x-1|=8$;

b) $|2x+1|=5$;

c) $x+|1-x|=3$;

d) $\big|x+|1-x|\big|=5$;

e) $|x-1|+|x-4|=3$;

f) $|2x-6|+|4x-2|=8$.

25. Demonstrați că $|x-2|+|x-3|\geq 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

26. Dacă $x, y, z\in\mathbb{Z}$ verifică egalitatea $xy=z^2+2+z(x-y)$, calculați $|x+y|$.

27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $|2x-1|=5$;

b) $|2x+3|=|6-x|$;

c) $|x-2|+|x-3|=3$;

d) $\big|2-|x-3|\big|=1$;

e) $\big|x+|x-3|\big|=5$;

f) $|x^2-3x+2|+|2-x|=0$.

28. Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care $|2m-1|<4$.

29. Determinați numărul numerelor întregi p pentru care $|2p-3|<6$.