

ADRIANA DRAGOMIR

OVIDIU BĂDESCU

În cadrul liceului a fost realizată caietul și, în final, din caietele de lucru și exerciții și nu numai o colecție de probleme și exerciții de matematică, ci și un caiet de lucru și exerciții de matematică în funcție de subiecte în modul următor: caietul este compus din 12 pagini, pe care sunt prezentate 12 subiecte, fiecare fiind împărțită în trei pagini. În caiet se pot găsi probleme de calcul, probleme de geometrie, probleme de probabilități, probleme de statistică, probleme de fizică și probleme de informatică. În caiet se pot găsi probleme de calcul, probleme de geometrie, probleme de probabilități, probleme de statistică, probleme de fizică și probleme de informatică. În caiet se pot găsi probleme de calcul, probleme de geometrie, probleme de probabilități, probleme de statistică, probleme de fizică și probleme de informatică.

Majoritatea problemelor sunt rezolvate în caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final. Problemele sunt rezolvate în caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA a IX-a

consolidare

Editia a VII-a

Matematica este o disciplina foarte importanta in lumea actuala. Este foarte importanta sa se stie cum se aplică in practica profesională.

INVATARE DE CONSOLIDARE

antrenament



Matematica este o disciplina foarte importanta in lumea actuala. Este foarte importanta sa se stie cum se aplică in practica profesională.

Este posibil sa se rezolve probleme de matematica in caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final. Problemele sunt rezolvate în caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final.

Este posibil sa se rezolve probleme de matematica in caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final.

Este posibil sa se rezolve probleme de matematica in caiet, cu o linie sau mai multe linii de scris, unde se poate scrie și rezolvarea, și rezultatul final.

Editura Paralela 45

<i>Prefață</i>	5
Capitolul I. Mulțimi și elemente de logică matematică	7
1.1. Mulțimea numerelor reale	7
1.2. Elemente de logică matematică, mulțimi	26
1.3. Tipuri de raționamente logice (inducție matematică, probleme de numărare și nu numai)	38
1.4. Probleme de matematică aplicată	48
1.5. Teste de evaluare	50
Capitolul II. Funcții	53
2.1. Siruri	53
2.2. Progresii aritmetice, progresii geometrice	57
2.3. Funcții, funcția de gradul I	68
2.4. Probleme de matematică aplicată	86
2.5. Teste de evaluare	88
2.6. Ecuația de gradul al II-lea	90
2.7. Funcția de gradul al II-lea	102
2.8. Probleme de matematică aplicată	113
2.9. Teste de evaluare	115
Capitolul III. Geometrie vectorială	117
3.1. Vectori în plan	117
3.2. Coliniaritate, concurență, paralelism	122
3.3. Probleme de matematică aplicată	130
3.4. Teste de evaluare	132
Capitolul IV. Trigonometrie și aplicații în geometrie	135
4.1. Elemente de trigonometrie	135
4.2. Aplicații ale trigonometriei și produsului scalar a doi vectori în geometria plană	150
4.3. Probleme de matematică aplicată	162
4.4. Teste de evaluare	165
Capitolul V. Modele de teste	168
5.1. Lucrări scrise semestriale	168
5.2. Teste de pregătire pentru Concursul de matematică aplicată „Adolf Haimovici”.....	178
5.3. Teste de pregătire pentru Olimpiada națională de matematică	184
Soluții	191
Capitolul I	191
Capitolul II	208
Capitolul III	233
Capitolul IV	244
Capitolul V	262
Bibliografie selectivă	286

1.1. Mulțimea numerelor reale

Breviar teoretic
Formule de calcul prescurtat

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$, $\forall n \in 2\mathbb{N} + 1$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ sau
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \frac{1}{2} \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2);$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac));$
- $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a).$

Modulul (sau valoarea absolută a) unui număr real x

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } |E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}, \text{ pentru orice expresie } E(x), x \in \mathbb{R}.$$

Proprietăți ale modulului

- $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

- $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$
- $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
- $\|x| - |y\| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|;$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0;$
- $\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ și $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$

Partea întreagă a unui număr real x este cel mai mare număr întreg cel mult egal cu numărul x și se notează $[x]$. **Partea fracționară** a lui x : se notează $\{x\}$ și $\{x\} = x - [x]$.

Proprietăți

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$
- $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$
- $[m+x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z};$
- $\{m+x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z};$
- $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1;$
- $[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx], \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ (**Hermite**).

Inegalități remarcabile

- Dacă $a \cdot b > 0$, atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- $x \cdot y \leq \frac{(x+y)^2}{4}, \forall x, y \in \mathbb{R};$
- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R};$
- $3 \cdot (xy + yx + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 3 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$

Inegalitatea mediilor (adevărată pentru numere strict pozitive)

$\min(a_k) \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq m_p \leq \max(a_k)$, unde

$$m_h = \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media armonică}),$$

$$m_g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \quad (\text{media geometrică}),$$

$$m_a = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \quad (\text{media aritmetică}),$$

$$m_p = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n}} \quad (\text{media pătratică}).$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwarz

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Inegalitatea lui Minkovski

$$\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leq \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$$

Inegalitatea lui Cebîșev

Dacă $(a_k)_{k \geq 1}$, $(b_k)_{k \geq 1}$ sunt două şiruri la fel ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \leq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k),$$

iar dacă (a_k) , (b_k) sunt două şiruri invers ordonate, atunci

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{k=1}^n b_k \geq n \cdot \sum_{k=1}^n (a_k \cdot b_k).$$

Inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+\alpha)^r > 1+r\alpha, \quad \forall \alpha, r \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -1, \quad r \geq 0$$

Respect pentru oameni și cărti

- 1.** Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere naturale:

a) $5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 4$; d) $[2 \cdot (-3) \cdot (-4) - 15 \cdot 3] : (3 - 10)$;
 b) $7 \cdot (-2) + 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-8) \cdot 5$; e) $[7 \cdot (-12) + (-3) \cdot (29)] : (12 - 18)$;
 c) $[3 \cdot (-4) - 5 \cdot 6] : [(-1) \cdot 3 + 2 \cdot 5]$; f) $[11 \cdot (-12) - (-8) \cdot 14] : (17 - 22)$.

- 2.** Stabiliți care dintre următoarele rezultate sunt numere întregi:

a) $\frac{2}{15} + \frac{7}{10} - \frac{5}{6}$; d) $60 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{2}{15} \right)$;
 b) $\frac{3}{14} + \frac{1}{21} - \frac{1}{6}$; e) $42 \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{13}{14} + \frac{17}{21} \right)$;
 c) $\frac{7}{10} - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$; f) $105 \cdot \left(\frac{17}{35} + \frac{14}{15} - \frac{11}{21} \right)$.

- 3.** Ordonați crescător, în fiecare caz, numerele următoare:

a) $x = \frac{11}{3}; y = 3,67; z = \frac{19}{6}; t = 3, (61)$. d) $x = -1,5; y = -\frac{7}{4}; z = -\frac{15}{8}; t = -\frac{8}{5}$.
 b) $x = \frac{9}{2}; y = 4,32; z = 4, (3); t = 4,56$. e) $x = -1,(2); y = -1,2; z = -\frac{7}{5}; t = -\frac{5}{4}$.
 c) $x = 2,6; y = \frac{11}{4}; z = \frac{5}{2}; t = 2, (63)$. f) $x = \frac{13}{5}; y = \sqrt{7}; z = \frac{10}{4}; t = 2, (61)$.

- 4.** Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu trei numere naturale consecutive, iar măsura celui mai mare unghi este triplul celui mai mic. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului.
- 5.** Calculați aria unui dreptunghi care are perimetrul egal cu 160 cm, iar dimensiunile sale sunt direct proporționale cu 5, respectiv 3.
- 6.** Calculați valoarea raportului $R = \frac{4x + 3y}{2x + y}$ știind că $x, y \in \mathbb{R}$ și $\frac{x}{y} = \frac{2}{7}$.
- 7.** Raportul dintre vârsta tatălui și vârsta fiului său este egal cu 5. Peste 6 ani, raportul vîrstelor va fi egal cu 3. Ce vîrstă are acum tatăl?

8. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

Respect pentru oameni și cărți

$$a = \sqrt{729};$$

$$d = \sqrt{961};$$

$$b = \sqrt{288};$$

$$e = \sqrt{2601};$$

$$c = \sqrt{147};$$

$$f = \sqrt{5184}.$$

9. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale:

$$A = \sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{125};$$

$$D = \sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{108};$$

$$B = \sqrt{98} - \sqrt{18} - \sqrt{8};$$

$$E = \sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{98};$$

$$C = \sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12};$$

$$F = \sqrt{1+3+5+\dots+99}.$$

10. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.

11. Dați un exemplu de număr rațional cuprins între $\sqrt{5}$ și $\sqrt{7}$.

12. Determinați numerele întregi a și b pentru care $(2 + \sqrt{3})^2 = a + b\sqrt{3}$.

13. Determinați numerele întregi c și d pentru care $\left(\frac{1}{3 - \sqrt{8}}\right)^2 = c + d\sqrt{2}$.

14. Ordonați crescător numerele p și q în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $p = \frac{2}{3}$ și $q = \frac{7}{9}$;

d) $p = \frac{7}{5}$ și $q = \sqrt{2}$;

b) $p = \frac{5}{8}$ și $q = \frac{7}{11}$;

e) $p = \frac{\pi}{6}$ și $q = \frac{11}{20}$;

c) $p = 3\sqrt{5}$ și $q = 5\sqrt{3}$;

f) $p = 1,(3)$ și $q = \frac{17}{13}$.

15. Dacă $a < b$, arătați că $a < \frac{2a+5b}{7} < b$.

16. Determinați numărul fracțiilor care satisfac simultan condițiile:

a) numărătorul este un divizor natural al lui 14;

b) numitorul este un divizor natural al lui 104.

17. Arătați că, în fiecare caz, expresiile date se pot scrie ca diferența a două pătrate:

Respect pentru oameni și cărti

- a) $A = (2a+b)(2a-b)(4a^2+b^2)$;
- b) $B = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$;
- c) $C = (a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^2-1)$;
- d) $D = (a^3-b^2)(a^3+b^2)(a^6+b^4)$;
- e) $E = (a+b+c)(a-b+c)$;
- f) $F = a(a-2b)$.

18. Descompuneți în factori următoarele expresii, ținând eventual cont de ipoteza indicată în fiecare caz:

- a) $E(x) = x^3 + x - 2$, $E(1) = 0$;
- b) $E(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 3$, $E(-1) = 0$;
- c) $E(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$, $E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$;
- d) $E(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$, $E(2) = 0$;
- e) $E(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$, există $a \in \mathbb{Z}$ cu $E(a) = 0$;
- f) $E(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$, există $a \in \mathbb{Z}$ cu $E(a) = 0$.

19. Precizați care dintre următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$:

- a) $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2$;
- b) $x^2 + 4x + 9 = (x + 3)^2$;
- c) $x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y)$;
- d) $x^2 + 4y^2 = (x + 2y)^2$;
- e) $4x^2 - y^2 = (2x - y)(2x + y)$;
- f) $(x - 2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$.

20. Descompuneți în factori expresiile următoare:

- a) $A = a^4 - a$;
- b) $B = x(a + b) - a - b$;
- c) $C = ax^2 - 2a - ax^3 + 2ax$;
- d) $D = a^3 - a^2b^2 + 2ab - 2b^3$;
- e) $E = a^3 - 2a^2 + 2a - 4$;
- f) $F = (2x - 1)^2 - 9$.

21. Descompuneti în factori și următoarele expresii:

a) $E(x) = (x-1)^2 - (x+2)^2;$

b) $E(x, y) = (x-3y)^2 - (2x-y)^2;$

c) $F(x) = 4x^2 - 12x + 9;$

d) $G(t) = 9t^2 + 24t + 16;$

e) $H(s) = 3s^2 - 30s + 75;$

f) $F(x, y) = 4x^3 - 8x^2y + 4xy^2.$

22. Determinați numerele reale a în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $|2a - 5| = 11;$

d) $2a - |a - 2| = 5;$

b) $|2 + a| = 4;$

e) $a - |a| + 6 = 0;$

c) $a + |a + 1| = 7;$

f) $2a = |2 - a|.$

23. Determinați perechile (x, y) de numere reale pentru care $x + |y| = 2x - |y| = 3.$

24. Determinați numerele reale x în fiecare dintre cazurile următoare:

a) $|3x - 1| = 8;$

d) $|x + |1 - x|| = 5;$

b) $|2x + 1| = 5;$

e) $|x - 1| + |x - 4| = 3;$

c) $x + |1 - x| = 3;$

f) $|2x - 6| + |4x - 2| = 8.$

25. Demonstrați că $|x - 2| + |x - 3| \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

26. Dacă $x, y, z \in \mathbb{Z}$ verifică egalitatea $xy = z^2 + 2 + z(x - y)$, calculați $|x + y|$.

27. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $|2x - 1| = 5;$

d) $|2 - |x - 3|| = 1;$

b) $|2x + 3| = |6 - x|;$

e) $|x + |x - 3|| = 5;$

c) $|x - 2| + |x - 3| = 3;$

f) $|x^2 - 3x + 2| + |2 - x| = 0.$

28. Determinați cel mai mic număr întreg m pentru care $|2m - 1| < 4$.

29. Determinați numărul numerelor întregi p pentru care $|2p - 3| < 6$.